Chapitre 22

Probabilités viagères définies sur des groupes de tête

Objectif : pouvoir tarifer des garanties définies sur plusieurs assurés.

Exemple 1 : rente de reversion (ou de survie) de x sur y. Il s'agit de verser un arrérage si x est décédé alors que y est encore en vie. Il faut étudier un phénomène viager qui peut prendre 4 états : x vivant et y vivant, x vivant et y décédé, x décédé et y vivant et enfin x décédé et y décédé

Exemple 2 : 3 têtes assurées, comme par exemple la rente orpheline (2 parents décédés, orphelin vivant).

Exemple 3 : capitaux de surive, capitaux de second (ou troisième) effet (verser au décès si un ou plusieurs assurés sont prédécédés).

22.1 La notion de groupe disparaissant au premier décès

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ un groupe de personnes âgées de $x_1, \cdots, x_n$ années. Notons $T_{(x_1,\cdots,x_n)}$ la date de 1er décès dans le groupe :

$$T_{(x_1,\cdots,x_n)} = \min(x_1, \cdots, x_n).$$

22.1.1 Distribution

$T_{(x_1,\cdots,x_n)}$ est une variable aléatoire caractérisée par une distribution :

$${}_tp_{(x_1,\cdots,x_n)} = \mathbb{P}(T_{(x_1,\cdots,x_n)} > t) = \mathbb{P}(x_1, \cdots, x_n \text{ vivants en } t).$$

Faisons l'hypothèse d'absence de contagion dans le groupe, ce qui implique l'indépendance des lois de survie ; il vient ${}_tp_{(x_1,\cdots,x_n)} = \mathbb{P}(x_1 \text{ vivants en } t) \cdots \mathbb{P}(x_n \text{ vivants en } t)$

Ainsi

$${}_tP_{(x_1,\cdots,x_n)} = {}_tp_{x_1} \cdots {}_tp_{x_n}.$$

En notant $l_{(x_1,\cdots,x_n)} = l_{x_1} \cdots l_{x_n}$ on obtient

$${}_tP_{(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{l_{x_1+t} \cdots l_{x_n+t}}{l_{x_1} \cdots l_{x_n}} = \frac{l_{(x_1+t,\cdots,x_n+t)}}{l_{(x_1,\cdots,x_n)}}.$$

22.1.2 Taux instantané de mortalité d'un groupe disparaissant au 1er décès

On rappelle que $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}(\ln {}_tp_x) = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$.

Soit $\mu_{(x_1+t,\cdots,x_n+t)}$ le taux instantané de mortalité d'un groupe disparaissant au 1er décès, il est défini par

$$\mu_{(x_1+t,\cdots,x_n+t)} = -\frac{d}{dt}\left(\ln {}_tp_{(x_1,\cdots,x_n)}\right).$$

Dans le cas d'indépendance des lois de survie, il vient

$$\mu_{(x_1+t,\cdots,x_n+t)} = \mu_{x_1+t}\cdots\mu_{x_n+t}.$$

La taux instantané de mortalité du groupe disparaissant au premier décès est la somme des taux de mortalité μ des membres du groupe.

22.1.3 Groupes disparaissants au dernier décès

On note $T_{(\overline{x_1,\cdots,x_n})}$ la date de dernier décès (par analogie, c'est un montage électrique avec n ampoules montées en parallèle).

On a $\mathbb{P}(T_{(\overline{x_1,\cdots,x_n})} > t) = 1 - \mathbb{P}(T_{(\overline{x_1,\cdots,x_n})} \leq t) = 1 - \mathbb{P}(x_1,\cdots,x_n \text{ décédés à } t) = 1 - {}_t\phi_{x_1}\cdots{}_t\phi_{x_n} = 1-(1-{}_tp_{x_1})\cdots(1-{}_tp_{x_n})$.

On voit que la loi de $T_{(\overline{x_1,\cdots,x_n})}$ apparaît comme une combinaison linéaire de l'ensemble des lois de survie $(x_1,\cdots,x_n)_{j\leq n}$. Cette propriété se généralise, voir section suivante.

22.1.4 Généralisation à des groupes de tête disparaissant au $r$ième décès

Notations :

- Probabilité que survivent **exactement** r têtes parmi n : ${}_tp_{\overline{(x_1,\cdots,x_n)}^{(r)}}$
- Probabilité que survivent **au moins** r têtes parmi n : ${}_tp_{\overline{(x_1,\cdots,x_n)}^{r}}$

Par défaut on écrit

- ${}_tp_{\overline{(x_1,\cdots,x_n)}^{(n)}} = {}_tp_{(x_1,\cdots,x_n)}$
- ${}_tp_{\overline{(x_1,\cdots,x_n)}^{1}} = {}_tq_{(\overline{x_1,\cdots,x_n})}$

Par ailleurs, la probabilitié de survie d'au moins r têtes est désigné par ${}_tp_{\frac{r}{G}} = \sum_{i=1}^{r} {}_tp_{\frac{(i)}{G}}$

${}_tp_{\frac{(r)}{G}}$ et ${}_tp_{\frac{r}{G}}$ s'expriment toujours par des combinaisons linéaires des probabilités de survie des sous-groupes de tête disparaissant au premier décès.

Exemple sur 3 têtes x, y, z

Déterminons les probabilités de survie d'exactement r têtes :

- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(1)}} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2{}_tp_{xt}p_y - 2{}_tp_{xt}p_z - 2{}_tp_{yt}p_z + 3{}_tp_{xt}p_{yt}p_z$
- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(2)}} = {}_tp_{xt}p_y + {}_tp_{xt}p_z + {}_tp_{yt}p_z - 3{}_tp_{xt}p_{yt}p_z$
- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(3)}} = {}_tp_{xt}p_{yt}p_z$

Passons à présent à la probabilité de survie d'au moins r têtes :

- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{3}} = {}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(3)}} = {}_tp_{xyz}$
- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{2}} = {}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(2)}} + {}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{(3)}} = {}_tp_{xt}p_y + {}_tp_{xt}p_z + {}_tp_{yt}p_z - 2{}_tp_{xt}p_{yt}p_z$
- ${}_tp_{\overline{(x,y,z)}^{1}} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} - -{}_tp_{yz} - -{}_tp_{xyz}$

Formule générale de calcul de ${}_tp_{\frac{(r)}{G}}$ [1] :

1. Cette partie est donnée à titre de culture de l'actuaire. On pourra consulter l'ouvrage de Petauton.

Soit $X_i(t)$ l'indicateur de survie de la tête i valant 1 si i est vivant en t avec la probabilité ${}_tp_{x_i}$ et 0 sinon. Soit $S(t) = X_1(t) + \cdots + X_n(t)$.

On rappelle que l'on a ${}_tp_{\frac{(r)}{G}} = \mathbb{P}(S(t) = r)$.

On peut écrire $\mathbb{E}\left[u^{S(t)}\right] = 1 * {}_tp_{\frac{(0)}{G}} + u_tp_{\frac{(1)}{G}} + u^n \cdots + {}_tp_{\frac{(n)}{G}}$, ce polynome étant la fonction génératrice des probabilités cherchées. Le coefficient de u^r est la probabilité cherchée ${}_tp_{\frac{(r)}{G}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u^{S(t)}\right] &= \prod_{i1}^{n} \mathbb{E}\left[u^{X_i(t)}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1_tq_{x_i} + u_tp_{x_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 + (u-1)_tp_{x_i}) \\
&= 1 + (u-1)S_1 + (u-1)^2 S_2 + \cdots + (u-1)^n S_n \qquad \text{après développement}
\end{aligned}$$

où les coefficients $S_i = \sum_{k_1 \neq \cdots \neq k_i} p_{x_{k_1} \cdots x_{k_i}}$, i individus différents pris dans le groupe initial.

En particulier

$$\begin{cases} S_1 = {}_tp_{x_1} + \cdots + {}_tp_{x_n} \\ S_n = {}_tp_{x_1 \cdots x_n} \end{cases}$$

Le coefficient de u^r est

$${}_tp_{\frac{(r)}{G}} = S_r - C_{r+1}^1 S_{r+1} + C_{r+2}^2 S_{r+2} + \cdots + (-1)^j C_{r+j}^j S_{r+j} + \cdots + (-1)^{n-r} C_n^{n-r} S_n.$$

Ceci rappelle le développement suivant les puissances croissantes de l'expression

$$S^r(1+r)^{-(r+1)} = S^r - C_{r+1}^1 S^{r+1} + \cdots + (-1)^j C_{r+j}^j S^{r+j} + \cdots$$

d'où la règle.

On obtient l'expression ${}_tp_{\frac{(r)}{G}}$ en fn linéaire des probabilités de survie de groupes disparaissants au premier décès en développant l'expression $S^r(1+S)^{-(r+1)}$ jusqu'au terme de degré n et en remplaçant enuite chaque terme S^i par une somme S_i.

Calcul de la probabilité de survie d'au moins r têtes ${}_tp_{\frac{r}{G}} = \sum_{i=1}^n {}_tp_{\frac{(i)}{G}}$. On reprend le polynôme $\mathbb{E}\left[U^{S(t)}\right] = 1_tp_{\frac{(0)}{G}} + \cdots + u^n{}_tp_{\frac{(n)}{G}}$ et on cherche les modifications pour faire apparaître $\sum_{i=1}^n {}_tp_{\frac{(i)}{G}}$.

On écrit $\mathbb{E}\left[U^{S(t)}\right] = {}_tp_{\frac{(0)}{G}} + \cdots + {}_tp_{\frac{(n)}{G}} + (u-1)_tp_{\frac{(1)}{G}} + \cdots + (u^r-1)_tp_{\frac{(r)}{G}} + \cdots + (u^n-1)_tp_{\frac{(n)}{G}}$ et l'on remarque que $u^r - 1 = (u^r + u^{r-1} + \cdots + u)\frac{u-1}{u}$.

On en déduit que les ${}_tp_{\frac{(r)}{G}}$ sont donc les coefficients du polynôme $\frac{u}{u-1}\left(\mathbb{E}\left[U^{S(t)}\right] - 1\right) = uS_1 + u(u-1)S_2 + \cdots + u(u-1)^{n-1}S_n$.

En particulier le coefficient de u^r est

$${}_tp_{\frac{(r)}{G}} = S_1 - C_n^1 S_{r+1} + \cdots + (-1)^j C_{r+j-1}^j S_{r+j} + \cdots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} S_n$$

développement analogue à celui de $S^r(1+S)^{-r}$, d'où la règle.

Notons que l'ordre des décès n'intervient pas !